



MATEMÁTICAS AVANZADAS

Examen Final - Enero 2013

Nombre: _____

NIU: _____ Grupo: _____

Calificación: _____

Instrucciones: El examen consta de seis preguntas. Dispone de dos horas para contestar, de forma razonada, a todos los ejercicios. Realice el examen completamente en bolígrafo.

- 1 Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2 Suponga que en un mercado con un único bien la función de demanda es $D(P) = 2 - P$ y la función de oferta es $S(P) = -1 + 2P$, donde $P > 0$ denota el precio unitario del bien. Asuma que el tiempo es discreto y que el mercado sigue la dinámica del Modelo de la Telaraña, es decir, $S(P_t) = D(P_{t+1})$ para cada t . Calcule el precio de equilibrio y estudie si es localmente asintóticamente estable.

3 Solucione el sistema de ecuaciones en diferencias

$$X_{t+1} = AX_t,$$

donde A es la matriz del ejercicio 1 cuando $a = 2$. ¿Es este sistema globalmente asintóticamente estable?
¿Existe alguna condición inicial X_0 tal que la solución converja?

4 Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$x' = -\frac{x^2 + x + 2tx}{t^2 + t + 2tx},$$

donde $x(0) = 1$.

- 5 Obtenga la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = \sin t$$

6 Obtenga la solución del siguiente sistema:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix},$$



Instrucciones: El examen consta de seis preguntas. Dispone de dos horas para contestar, de forma razonada, a todos los ejercicios. Realice el examen completamente en bolígrafo.

- 1 Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution. The eigenvalues of A are $\sigma(A) = \{1, a, -a\}$. If $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ then the three roots are real and different each other, and A is diagonalizable. We study the other two cases:

- (a) If $a = 0$. Then $\sigma(A) = \{1, 0\}$ with $m(1) = 1$ and $m(0) = 2$. We compute the dimension of $S(0)$, $\dim S(0) = 3 - \text{rank}(A - 0 \cdot I_3) = 3 - 1 = 2$, which coincides with its multiplicity. Therefore, the matrix A is diagonalizable.
- (b) If $a = -1$. Then $\sigma(A) = \{1, -1\}$ with $m(-1) = 1$ and $m(1) = 2$. We compute the dimension of $S(1)$, $\dim S(1) = 3 - \text{rank}(A - 1 \cdot I_3) = 3 - 1 = 2$, which coincides with its multiplicity. Therefore, the matrix A is diagonalizable.
- (c) If $a = 1$. Then $\sigma(A) = \{1, -1\}$ with $m(1) = 2$ and $m(-1) = 1$. On the other hand, $\dim S(1) = 3 - \text{rank}(A - 1 \cdot I_3) = 3 - 2 = 1$. Since the dimension of the eigenspace and the multiplicity do not coincide, the matrix A is not diagonalizable.

- 2 Suponga que en un mercado con un único bien la función de demanda es $D(P) = 2 - P$ y la función de oferta es $S(P) = -1 + 2P$, donde $P > 0$ denota el precio unitario del bien. Asuma que el tiempo es discreto y que el mercado sigue la dinámica del Modelo de la Telaraña, es decir, $S(P_t) = D(P_{t+1})$ para cada t . Calcule el precio de equilibrio y estudie si es localmente asintóticamente estable.

Solution. The difference equation we need to solve is

$$-1 + 2P_t = 2 - P_{t+1} \quad \equiv \quad P_{t+1} + 2P_t = 3$$

The characteristic polynomial of the associated homogeneous equation is $r + 2 = 0$; hence $x_t^h = A_0(-2)^t$. Since the independent term $b_t = 3$ is a polynomial of degree zero, we try as particular solution $x_t = C$. Once we substitute into the equation we obtain that $x_t^p = C = 1$. Finally

$$x_t = A_0(-2)^t + 1$$

The equilibrium price is not globally asymptotically stable.

- 3 Solucione el sistema de ecuaciones en diferencias

$$X_{t+1} = AX_t,$$

donde A es la matriz del ejercicio 1 cuando $a = 2$. ¿Es este sistema globalmente asintóticamente estable? ¿Existe alguna condición inicial X_0 tal que la solución converja?

Solution. When $a = 2$, $\sigma(A) = \{1, 2, -2\}$, and $S(1) = \langle (0, 1, 0) \rangle$, $S(2) = \langle (1, 4, 1) \rangle$ and $S(-2) = \langle (-1, 0, 1) \rangle$. The system is homogeneous, and therefore

$$x_t = A_0 1^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 2^t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 (-2)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Since not all the eigenvalues are smaller than 1, the system is not globally asymptotically stable. On the other hand, the solution will converge for an initial condition X_0 only if $A_1 = A_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = X_0 = A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + O \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = \gamma = 0.$$

For $X_0 = (0, 1, 0)$, for example, the solution converges.

4 Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$x' = -\frac{x^2 + x + 2tx}{t^2 + t + 2tx},$$

donde $x(0) = 1$.

Solution. It is an exact equation whose canonical form is $(x^2 + x + 2tx)dt + (t^2 + t + 2tx)dx = 0$. In this case, $P(t, x) = x^2 + x + 2tx$ and $Q(t, x) = t^2 + t + 2tx$. We check the condition to be exact:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x + 1 + 2t = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

- Let $F(t, x)$ be the solution of the equation we are looking for.
- Impose that

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = P(t, x) \Rightarrow \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = x^2 + x + 2tx,$$

by integrating both sides with respect to t , we can isolate $F(t, x)$.

$$F(t, x) = x^2 t + xt + xt^2 + h(x).$$

- Now, impose that

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = Q(t, x) \Leftrightarrow h'(x) = 0.$$

- To obtain $h(x)$, simply integrate.

$$h(x) = 0.$$

- Substitute $h(x)$ in the expression of Step 2, and then:

$$F(t, x) = x^2 t + xt + xt^2.$$

- The solution to the exact equation is given in implicit form:

$$x^2 t + xt + xt^2 = C$$

Now, we impose the initial condition $x(0) = 1$ to obtain that $C = 0$. Therefore, the solution is $t^2 + x^2 - 3tx = 0$.

5 Obtenga la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = \sin t$$

Solution. The roots of the characteristic polynomial are $r = 1$ with $m(1) = 3$. Then,

$$x^h(t) = A_0 e^t + A_1 t e^t + A_2 t^2 e^t$$

Since $b(t) = \sin t$, we propose $x(t) = C \sin t + D \cos t$. Taking the needed derivatives and substituting we get that $C = \frac{1}{4}$ and $D = \frac{-1}{4}$. And the,

$$x^p(t) = \frac{1}{4} \sin t - \frac{1}{4} \cos t$$

Finally

$$x(t) = A_0 e^t + A_1 t e^t + A_2 t^2 e^t + \frac{1}{4} \sin t - \frac{1}{4} \cos t$$

6 Obtenga la solución del siguiente sistema:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix},$$

Solution. Since the matrix is already diagonal, then we know that $D = P = P^{-1} = I_3$, which implies that the solution to the associated homogeneous system is:

$$X^h(t) = K_0 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In order to obtain a particular solution, we solve the system

$$K'_0 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K'_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix} \quad \equiv \quad K'_0 = K'_1 = 1 \quad \equiv \quad K_0 = K_1 = t$$

Then, a particular solution is

$$X^p(t) = t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t e^t \\ t e^{2t} \end{pmatrix}$$

Finally,

$$X(t) = K_0 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t e^t \\ t e^{2t} \end{pmatrix}$$